

**Určité integrály**

Trieda školy: K12

**Obsah**

[Niektoré vlastnosti neurčitého integrálu 3](#_Toc125621236)

[Tabuľka neurčitých integrálov (okamžité primitíva) 3](#_Toc125621237)

[Integrály hyperbolických funkcií 5](#_Toc125621238)

[Veta a vzorce pre integráciu po častiach 6](#_Toc125621239)

[Vety a integračné vzorce so zmenou premennej (substitúcia) pre neurčitý integrál 7](#_Toc125621240)

[Fyzikálny význam neurčitého integrálu 8](#_Toc125621241)

[Test 9](#_Toc125621242)

# Niektoré vlastnosti neurčitého integrálu

**Veta 9:** Ak funkcie *f*: *I*→ R şi**** : *I*→ R pripúšťajú primitíva na intervale I a funkcia f má na intervale I spojitú deriváciu, potom platia nasledujúce vlastnosti:

1. 
2. , a 
3. , kde 
4. , kde konštanta 
5. 
6. , kde konštanta 
7. , kde konštanta 
8. 
9. 
10. .

# Tabuľka neurčitých integrálov (okamžité primitíva)

1. , kde ;
2. , kde ;
3. , kde , şi sau ;
4. , kde , , alebo ;
5. , kde , ;
6. , ;
7. , kde alebo ;
8. , kde ;
9. , kde ;
10. , kde ;
11. , kde ;
12. , kde ;
13. , kde a ;
14. , kde ;
15. , kde ;
16. , kde alebo ;
17. , kde alebo a ;
18. , kde alebo ;
19. , kde ot a ;
20. , kde ;
21. , kde ;
22. , kde a ;
23. , kde a ;
24. , kde a x2
25. , kde a x2
26. , kde a 
27. , kde e a ;
28. , kde a ;
29. ; 30) ;

# Integrály hyperbolických funkcií

a) ;b) ; c) ; d) .

31) , kde ;

32) , kde ;

33) , kde ;

34) , kde alebo ;

35) , kde \{1}.

36) *+C*, kde .

38) *+C*, kde .

# Veta a vzorce pre integráciu po častiach

**Veta 10:** Ak sú funkcie ***f*:*I*→ *R*** şi ***g*:*I*→ *R*** diferencovateľné a majú spojitú deriváciu na intervale *I*, potom funkcie şi pripúšťajú primitíva na intervale I a vzorec platí:

 (1)

**Poznámka:** Ak si všimneme şi , potom vzorec (1) nadobúda užitočnejší tvar:

 (2)

**- Vzorce (1) a (2) sa nazývajú vzorce integrovania po častiach pre neurčitý integrál.**

# Vety a integračné vzorce so zmenou premennej (substitúcia) pre neurčitý integrál

**Veta 11 (prvý vzorec so zmenou premennej):** Ak je funkcia diferencovateľná na intervale I a funkcia akceptuje primitíva rozsahu *J a* je primitívom funkcie , potom funkcia je primitívom funkcie a nastáva vzorec



**Substitučná metóda výpočtu neurčitého integrálu (metóda prvej zmeny premennej)::**

a) Ak sa vykoná zámena 

= .

b) Ak sa vykoná zámena 

= .

**Veta 12: (druhá zmena vzorca premennej):** Ak funkcia je bijektívna a diferencovateľná na intervale *I,* funkcia akceptuje primitíva rozsahu *J a H* je primitívom funkcie , potom funkcia podporuje primitíva a funkcia je primitívom funkcie f a vzorec platí.



**Poznámka:** Prakticky sa pri výpočte neurčitého integrálu metódou zmeny druhej premennej uvádza , kde je z a platí vzorec:

 .

# Fyzikálny význam neurčitého integrálu

**I fyzikálny význam neurčitého integrálu:**

- Ak sa pohyblivý (hmotný bod) pohybuje nerovnomerne a zákon jeho premiestnenia je , a zákon zmeny jeho rýchlosti je , potom:

1) Z fyzikálneho významu derivácie vyplýva: ;

2) Z fyzikálneho významu neurčitého integrálu vyplýva: 

**II fyzikálny význam neurčitého integrálu:**

- Ak sa pohyblivý (hmotný bod) pohybuje nerovnomerne a zákon jeho pohybu je , zákon zmeny jeho rýchlosti je a zákon zmeny jeho zrýchlenia je , potom:

1) Z fyzikálneho významu derivácie máme: sau ;

2) Z fyzikálneho významu neurčitého integrálu vyplýva: ;

3) Z fyzikálneho významu neurčitého integrálu vyplýva: .

**III fyzikálny význam neurčitého integrálu:**

Ak sa hmotný bod pohybuje pozdĺž osi Ox pod vplyvom sily , potom zákon zmeny práce vykonanej pod vplyvom sily *F* je : .

# Test

Vypočítajte neurčité integrály:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| č. | | Variant I | Variant II | Variant III |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  |  | |  |  |
|  | \* | |  |  |
|  | \* | |  |  |